Università degli Studi di Catania

C.d.L. in Ingegneria Industriale (f-o)

Studium: A.A. 2023/24

Docente: A.O.Caruso

Formulario approssimazione polinomiale di una funzione nell'intorno dello zero

In quanto segue ricordiamo l'approssimazione polinomiale nell'intorno dello zero per le principali funzioni, facendo uso della notazione di Landau. Si ricordi che il simbolo $k!$ denota il fattoriale del numero intero non negativo k, precisamente $0! = 1$ e $k! = k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$ per $k = 1, 2, \ldots$, (si ricordi pure che per $n = 1, 2, \ldots$ le posizioni $(2n)!! = (2n) \cdot (2n-2) \cdot \cdots \cdot 2$ e $(2n+1)!! = (2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 1$ denotano rispettivamente i semifattoriali dei numeri $2n$ e 2n+1).

- Funzione somma della serie geometrica, $x \in]-1,1[$,

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-x}} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + o\big(x^n\big).$$

- Funzione dedotta dalla somma della serie geometrica, $x \in]-1,1[$,

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+x}} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + o\big(x^n\big).$$

- Funzione esponenziale, $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{e^x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\big(x^n\big).$$

■ Funzione esponenziale generale, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,

$$\mathbf{a^x} = 1 + \frac{(\ln a)^1}{1!}\,x + \frac{(\ln a)^2}{2!}\,x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!}\,x^3 + \frac{(\ln a)^4}{4!}\,x^4 + \cdots + \frac{(\ln a)^n}{n!}\,x^n + o\big(x^n\big)\,.$$

■ Funzione generatrice esponenziale, $x \in \mathbb{R}$, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ numeri razionali detti numeri di J.Bernoulli-S.Takakazu definiti ricorsivamente dalle posizioni $B_0 = 1$, $B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k} B_k$ per $n = 1, 2, \ldots$ (in particolare i numeri dispari sono nulli da tre in poi, precisamente $B_{2n+1} = 0$ per $n = 1, 2, \ldots$ e, per esempio, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, $B_{12} = -\frac{691}{2730}$, $B_{14} = \frac{7}{6}$, $B_{16} = -\frac{3617}{510}$, $\ldots$),

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{e^x - 1}} = 1 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1!}\,x + \frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{2!}\,x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{30}\right)}{4!}\,x^4 + \frac{\left(\frac{1}{42}\right)}{6!}\,x^6 + \cdots + \frac{B_n}{n!}\,x^n + o\big(x^n\big)\,.$$

■ Funzione logaritmica, $x \in]-1, +\infty[$,

$$\ln(\mathbf{1 + x}) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} + o\big(x^n\big)\,.$$

■ Funzione logaritmica dedotta dalla precedente, $x \in]-\infty, 1[$,

$$\ln(\mathbf{1 - x}) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o\big(x^n\big)\,.$$

■ Funzione binomiale, $x \in]-1, +\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\binom{\alpha}{n}$ coefficiente binomiale generalizzato definito dalle posizioni $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$(\mathbf{1 + x})^{\alpha} = 1 + \alpha\,x + \frac{\alpha\,(\alpha - 1)}{2}\,x^2 + \binom{\alpha}{3}\,x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\,x^n + o\big(x^n\big)\,.$$

■ Funzione binomiale, $x \in [-1,+\infty[$, $\alpha = \frac{1}{2}$ e si ha $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{1} = \frac{1}{2}$, $\binom{\alpha}{n} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$ per $n = 2, 3, \ldots$,

$$\sqrt{\mathbf{1+x}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n + o\big(x^n\big).$$

■ Funzione binomiale, $x \in]-1,+\infty[$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ e si ha $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1+x}}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2 - \frac{5}{16} x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + o\big(x^n\big).$$

■ Funzione seno, $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin \mathbf{x} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\big(x^{2n+2}\big).$$

■ Funzione coseno, $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos \mathbf{x} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\big(x^{2n+1}\big).$$

■ Funzione tangente, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$\tan \mathbf{x} = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \cdots + (-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n}-1) B_{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} + o\big(x^{2n}\big).$$

■ Funzione cotangente moltiplicata per l'identità, $x \in]-\pi, \pi[$,

$$\mathbf{x} \cot \mathbf{x} = 1 - \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{45} x^4 - \frac{2}{945} x^6 + \cdots + (-1)^n 2^{2n} B_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\big(x^{2n+1}\big).$$

■ Funzione secante, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ numeri interi detti numeri di L.Eulero definiti ricorsivamente dalle posizioni $E_0 = 1$, $E_{2n} = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k} E_{2k}$ per $n = 1, 2, \ldots$, con $E_{2n+1} = 0$ per $n = 0, 1, \ldots$ (pertanto $E_1 = E_3 = E_5 = \cdots = E_{2n+1} = 0$ per ogni $n = 0, 1, \ldots$ e, in particolare, per esempio, $E_2 = -1$, $E_4 = 5$, $E_6 = -61$, $E_8 = 1385$, $E_{10} = -50521$, $E_{12} = 2702765 , \ldots$) ,

$$\sec \mathbf{x} = 1 - \frac{(-1)}{2!}\, x^2 + \frac{5}{4!}\, x^4 - \frac{(-61)}{6!}\, x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!}\, x^{2n} + o\big(x^{2n+1}\big) .$$

■ Funzione cosecante moltiplicata per l'identità, $x \in]\pi, \pi[$ (la formula per il calcolo del coefficiente di x^{2n} sussiste per $n = 1, 2, \ldots$),

$$\mathbf{x} \csc \mathbf{x} = 1 + \frac{1}{6}\, x^2 + \frac{7}{360}\, x^4 + \frac{31}{15120}\, x^6 + \cdots + (-1)^{n-1}(2^{2n} - 2)B_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\big(x^{2n+1}\big) .$$

■ Funzione arcoseno, $x \in [-1, 1]$,

$$\arcsin \mathbf{x} = x + \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{3}{40}\, x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\big(x^{2n+2}\big) .$$

■ Funzione arcocoseno, $x \in [-1, 1]$: ricordando che, sempre per ogni $x \in [-1, 1]$, risulta $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, si ha

$$\arccos \mathbf{x} = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}\, x^3 - \frac{3}{40}\, x^5 - \cdots - \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\big(x^{2n+2}\big) .$$

■ Funzione arcotangente, $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan \mathbf{x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\big(x^{2n+2}\big) .$$

■ Funzione arcocotangente, $x \in \mathbb{R}$: ricordando che, sempre per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$, si ha

$$\operatorname{arccot} \mathbf{x} = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\big(x^{2n+2}\big) .$$

■ Funzione seno iperbolico, $x \in \mathbb{R}$,

$$\sinh \mathbf{x} \quad = \quad x \;+\; \frac{x^3}{3!} \;+\; \frac{x^5}{5!} \;+\; \cdots \;+\; \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \;+\; o\big(x^{2n+2}\big)\,.$$

■ Funzione coseno iperbolico, $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh \mathbf{x} \quad = \quad 1 \;+\; \frac{x^2}{2!} \;+\; \frac{x^4}{4!} \;+\; \cdots \;+\; \frac{x^{2n}}{(2n)!} \;+\; o\big(x^{2n+1}\big)\,.$$

■ Funzione tangente iperbolica, $x \in \mathbb{R}$,

$$\tanh \mathbf{x} = x - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{2}{15}\,x^5 - \frac{17}{315}\,x^7 + \cdots + 2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!} + o\big(x^{2n}\big)\,.$$

■ Funzione cotangente iperbolica moltiplicata per l'identità, $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{x}\,\coth \mathbf{x} = 1 + \frac{1}{3}\,x^2 - \frac{1}{45}\,x^4 + \frac{2}{945}\,x^6 + \cdots + 2^{2n}\,B_{2n}\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\big(x^{2n+1}\big)\,.$$

■ Funzione secante iperbolica, $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sech} \mathbf{x} = 1 + \frac{(-1)}{2!}\,x^2 + \frac{5}{4!}\,x^4 + \frac{(-61)}{6!}\,x^6 + \cdots + \frac{E_{2n}}{(2n)!}\,x^{2n} + o\big(x^{2n+1}\big)\,.$$

■ Funzione cosecante iperbolica moltiplicata per l'identità, $x \in \mathbb{R}$ (la formula per il calcolo del coefficiente di x^{2n} sussiste per $n = 1, 2, \ldots$),

$$\mathbf{x}\,\operatorname{csch}\mathbf{x} = 1 + \frac{1}{6}\,x^2 - \frac{7}{360}\,x^4 + \frac{31}{15120}\,x^6 + \cdots + (2^{2n}-2)B_{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\big(x^{2n+1}\big)\,.$$

■ Funzione settore seno iperbolico, $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{settsinh}\mathbf{x} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\big(x^{2n+2}\big)\,.$$

■ Funzione settore tangente iperbolica (talvolta denotato col simbolo arctanh x), $x \in]-1,1[$,

$$\text{setttanh}\mathbf{x} \quad = \quad x \;+\; \frac{x^3}{3} \;+\; \frac{x^5}{5} \;+\; \cdots \;+\; \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \;+\; o\big(x^{2n+2}\big)\,.$$