Domanda 1. La pressione è la è la grandezza scalare che misura la spinta perpendicolare a cui è sottoposta una superficie per unità di area. Quindi:

$$p = \frac{F_\perp}{S}$$

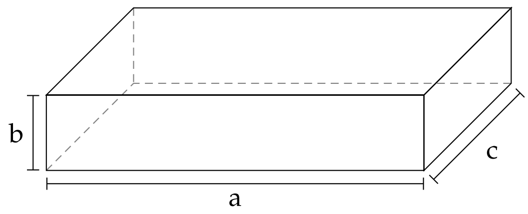
La forza si misura in newton:

$$1N = 1kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

L'unità di misura è:

$$\frac{kg \cdot \frac{m}{s^2}}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2} = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}.$$

Domanda 2. Volume di un parallelepipedo rettangolo:



$$V = abc$$

Sappiamo che:

$$ab = 8$$

$$ac = 12$$

$$bc = 24$$

$$\Rightarrow (ab)(ac)(bc) = 8 \cdot 12 \cdot 24$$

$$\Rightarrow a^2b^2c^2 = 8 \cdot 12 \cdot 24 = 8 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 3 = 8^2 \cdot 36 \Rightarrow abc = 8 \cdot 6 = 48$$

$$ab = 8, ac = 12, bc = 24$$

$$a = 2, b = 4, c = 6$$

Domanda 3.

$$\operatorname{sen} \alpha + \cos 4\alpha \geq 2$$

Unica possibilità:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = 1 \\ \cos 4\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Domanda 4. Ricordiamo che, dati due insiemi A e B, si definisce:

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Poniamo:

$$P = \{\text{abitanti pianeta Pril}\}$$

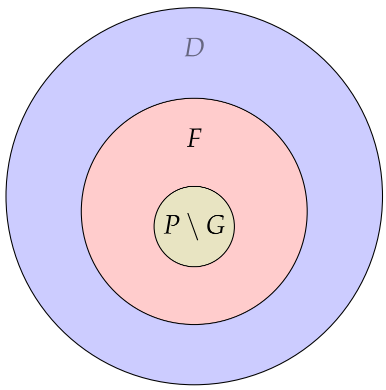
$$F = \{\text{Frug}\}$$

$$D = \{\text{Drul}\}$$

$$G = \{\text{Grut}\}$$

I Frug sono Drul e chi non è Grut è Frug.
Allora noi sappiamo che $F \subset D$ e che $P \setminus G \subset F$. Quindi:

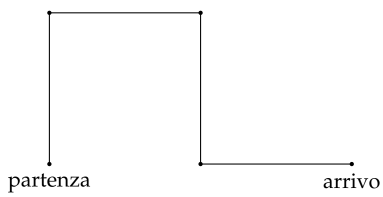
$$P \setminus G \subset F \subset D$$



Risposte possibili:
1. Chi è Drul è Frug: cioè $D \subset F$: falsa
2. Chi non è Frug non è Grut: cioè $P \setminus F \subset P \setminus G$: falsa
3. Chi non è Drul è Grut: cioè $P \setminus D \subset G$: vera
4. Chi è Frug non è Grut: cioè $F \subset P \setminus G$: falsa
5. Chi è Grut è Drul: cioè $G \subset D$: falsa

—-
Quali sono quelli facili da escludere?

Domanda 5.



Domanda 6. α è un angolo tra 0 e π, per cui $\operatorname{sen}\alpha > 0$. Dunque:

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

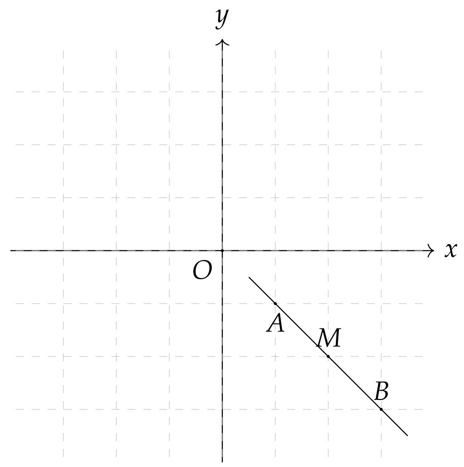
Domanda 7. L'asse del segmento congiungente A e B è la retta passante per il punto medio di A e B e ortogonale alla retta AB.

Se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, allora:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Nel nostro caso:

$$A = (1, -1), B = (3, -3) \Rightarrow M = (2, -2).$$



Le possibili risposte sono:
1. $y = x - 2$: no
2. $y = x + 4$: no
3. $y = 2 - x$:no
4. $y = 2 + x$: no
5. $y = x - 4$: sì.

Osserviamo che la retta cercata deve passare per $M = (2, -2)$. Qual è la risposta giusta?

$$AB\colon x + y = 0 \Rightarrow y = -x$$

$$m = -1 \Rightarrow m' = 1$$

$$y + 2 = x - 2 \Rightarrow y = x - 4.$$

Domanda 8. Ricordiamo che un polinomio $p(x)$ ha grado n se:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

dove $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \neq 0$.

$$p(x) = 3x^5 - 4x^2 + 2x - 1$$

$$p(x) = -4x^7 + 2x^6 - 5x^3 + 2x^2 + 8x + 9$$

Quindi:

$$p(x) \text{ ha grado } 7 \Rightarrow xp(x) \text{ ha grado } 8$$

$$xp(x) = x(-4x^7 + 2x^6 - 5x^3 + 2x^2 + 8x + 9) = -4x^8 + 2x^7 - 5x^3 + 2x^3 + 8x^2 + 9x$$

$$p(x) \text{ ha grado } 7 \Rightarrow p(x^2) \text{ ha grado } 2{\cdot}7{=}14.$$

$$p(x^2) = -4(x^2)^7 + 2(x^2)^6 - 5(x^2)^3 + 2(x^2)^2 + 8x^2 + 9 =$$

$$= -4x^{14} + 2x^{12} - 5x^6 + 2x^4 + 8x^2 + 9$$

$$xp(x) - p(x^2) \text{ ha grado } 14$$

Domanda 9.

$$2^{a+b} \cdot 2^{a-b} = 2^{a+b+a-b} = 2^{2a} = 4^a$$

Domanda 10. Sappiamo che:

$$0 < a < 1 < b$$

Allora cosa è vero?
1. può essere $0 < a\sqrt{b} < a$: NO

$$a\sqrt{b} < a \Leftrightarrow \sqrt{b} < 1$$

2. $a < a\sqrt{b} < \sqrt{b}$: VERA

$$a < a\sqrt{b} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{b}$$

$$a\sqrt{b} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < 1$$

3. $a\sqrt{b} > 1$: NO
4. può essere $a\sqrt{b} > b$: NO

$$a\sqrt{b} > b \Leftrightarrow a > \sqrt{b}$$

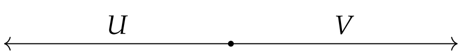
5. $a < a\sqrt{b} < 1$: NO

Domanda 11. Tre vettori $U, V, U + V$ hanno lo stesso modulo. Allora l'angolo tra i due vettori U e V è:
1. 120 gradi: VERA
2. 60 gradi: NO
3. 180 gradi: NO
4. 90 gradi: NO
5. 0 gradi: NO

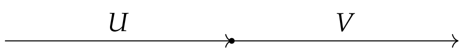
Possiamo arrivarci per esclusione.

Se i due vettori sono paralleli, allora o $U + V$ è il vettore nullo oppure ha modulo il doppio del modulo di U e V. Quindi, possiamo escludere le risposte 4 e 5.

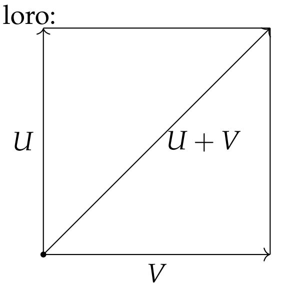
Se i due vettori sono opposti allora $U + V$ è il vettore nullo.



Se i due vettori sono concordi, allora $U + V = 2V$:

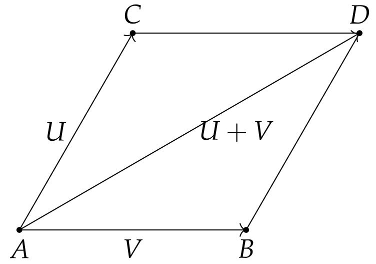


Se i due vettori non sono paralleli possiamo usare la regola del parallelogramma. Se U e V sono ortogonali tra loro:



allora $U + V$ non ha lo stesso modulo di U e V.

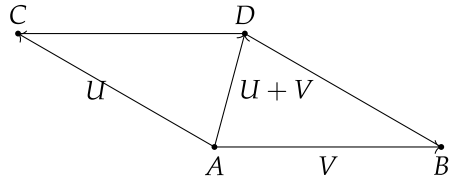
Se i due vettori formulano un angolo di 60 gradi:



allora si ha:

$$C\hat{A}B = 60^\circ \Rightarrow D\hat{B}A = D\hat{C}A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Se fosse $\overline{AD} = \overline{AB}$, allora ABD sarebbe un triangolo isoscele e si avrebbe $D\hat{B}A = A\hat{D}B = 120^\circ$: assurdo.
L'unica possibilità è che l'angolo sia di 120° :



Infatti in questo caso è evidente che i triangoli ABD e ACD sono equilateri.

Domanda 12. Poniamo:

$$x = \text{peso netto della bottiglia piena}$$

$$y = \text{tara, cioè peso della bottiglia vuota}$$

La domanda è $y = ?$
Sappiamo che:

$$\begin{cases} x + y = 1.8 \\ \dfrac{1}{2}x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1.6 \\ y = 0.2 \end{cases}$$

Quindi, la risposta giusta è 200 grammi.

Domanda 13. $A = (3,3), B = (0,0)$

$$AB\colon \frac{x-0}{3-0} = \frac{y-0}{3-0} \Rightarrow x - y = 0.$$

Vogliamo che $C = (2a+1, 2-a)$ stia sulla retta AB :

$$2a + 1 = 2 - a \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}.$$

Domanda 14. Se $p(x) = x^4 - 2x^2 + 2$, allora il resto della divisione per $x - 1$ è:

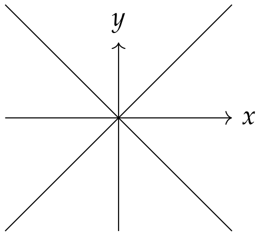
$$p(x) = (x-1)q(x) + r$$

$$r = p(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 2 = 1.$$

Domanda 15. Il luogo dei punti le cui coordinate verificano l'equazione $x^4 - y^4 = 0$ cos'è?

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

$x^2 + y^2 = 0$: un punto solo, $(0,0)$.
$x + y = 0, x - y = 0$: rette.



Domanda 16.

$$8^{-\frac{3}{2}} \cdot 36^{\frac{1}{4}} = (2^3)^{-\frac{3}{2}}.(6^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{9}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{9}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 2^{-4} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

Quindi, la risposta giusta è $\frac{\sqrt{3}}{16}$.

Domanda 17.

$$36 = 4 \cdot 9 = 2^2 \cdot 3^2$$

Ovviamente, tutti i divisori di 36 sono del tipo

$$2^r \cdot 3^s$$

dove $r, s \in \{0, 1, 2\}$. Quante possibilità abbiamo? $3 \cdot 3 = 9$.

$$2^2 \cdot 5^3 \cdot 7$$

$$2^r \cdot 5^s \cdot 7^p$$

$$r = 0, 1, 2$$

$$s = 0, 1, 2, 3$$

$$p = 0, 1$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

Domanda 18.

$$(x^2 - 1) \log(x + 1) = 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Ma $x = -1$ va scartato perché $\log(x + 1)$ non è definito per $x = -1$.

$$\log(x + 1) = 0 \Rightarrow x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0.$$

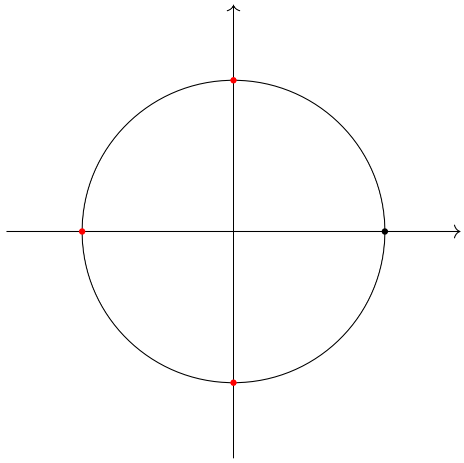
Quindi, l'equazione ha 2 soluzioni.

Domanda 19. In un triangolo rettangolo isoscele gli angoli sono: $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$. Quindi:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Domanda 20.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & \text{circonferenza di centro l'origine e raggio } \sqrt{2} \\ xy = 0 & \text{unione dei due assi cartesiani} \\ x \leq 0 \end{cases}$$



I punti sono 3.